



莫比乌斯反演

——吉大附中实验学校 PoPoQQQ

什么是莫比乌斯反演？

- 介绍这个之前，我们先来看一个函数

- $$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

- 根据 $F(n)$ 的定义，我们显然有：

- $F(1)=f(1)$
- $F(2)=f(1)+f(2)$
- $F(3)=f(1)+f(3)$
- $F(4)=f(1)+f(2)+f(4)$
- $F(5)=f(1)+f(5)$
- $F(6)=f(1)+f(2)+f(3)+f(6)$
- $F(7)=f(1)+f(7)$
- $F(8)=f(1)+f(2)+f(4)+f(8)$

于是我们可以通过 $F(n)$ 推导出 $f(n)$

- $f(1)=F(1)$
- $f(2)=F(2)-F(1)$
- $f(3)=F(3)-F(1)$
- $f(4)=F(4)-F(2)$
- $f(5)=F(5)-F(1)$
- $f(6)=F(6)-F(3)-F(2)+F(1)$
- $f(7)=F(7)-F(1)$
- $f(8)=F(8)-F(4)$
- 在推导的过程中我们是否发现了一些规律？

莫比乌斯反演

- 公式：

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

- 其中 $\mu(d)$ 为莫比乌斯函数，定义如下：
- (1) 若 $d = 1$ 则 $\mu(d) = 1$
- (2) 若 $d = p_1 p_2 \cdots p_k$, p_i 为互异素数，那么 $\mu(d) = (-1)^k$
- (3) 其它情况下 $\mu(d) = 0$

莫比乌斯函数的性质

- (1)对于任意正整数 n 有:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n > 1) \end{cases}$$

- 证明:
- ①当 $n = 1$ 时显然
- ②当 $n \neq 1$ 时, 将 n 分解可以得到 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$
- 在 n 的所有因子中, μ 值不为零的只有所有质因子次数都为1的因子, 其中质因数个数为 r 个的因子有 C_k^r 个
- 那么显然有:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 + \cdots + (-1)^k C_k^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i$$

莫比乌斯函数的性质

- 只需证明 $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0$ ($n \in N_+$) 即可
- 二项式定理: $(x + y)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i y^{n-i}$
- 令 $x = -1, y = 1$, 代入即可得证。

莫比乌斯函数的性质

- (2)对于任意正整数 n 有:

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

- 其实没什么用, 结论挺好玩的可以记一下
- 只需要令 $F(n) = n, f(n) = \varphi(n)$, 代入莫比乌斯反演的公式即可
- 至于为什么 $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ 就留给大家做思考题了

莫比乌斯函数的性质

- (3)积性函数

- 数论上积性函数的定义：

设 $f(n)$ 为一个定义在 $N+$ 集合上的函数，如果对于任意 $(x, y) = 1$ 有 $f(xy) = f(x)f(y)$ ，则称 $f(n)$ 为一个积性函数；若对于任意 x 和 y 均有 $f(xy) = f(x)f(y)$ ，则称 $f(n)$ 为一个完全积性函数

- 积性函数的性质：

- ① $f(1) = 1$

- ②积性函数的前缀和也是积性函数

莫比乌斯函数的性质

- 由于莫比乌斯函数是积性函数，因此我们可以通过线性筛来求出莫比乌斯函数的值
- 代码：

```
• mu[1]=1;
• for(i=2;i<=n;i++)
• {
•     if(!not_prime[i])
•     {
•         prime[++tot]=i;
•         mu[i]=-1;
•     }
•     for(j=1;prime[j]*i<=n;j++)
•     {
•         not_prime[prime[j]*i]=1;
•         if(i%prime[j]==0)
•         {
•             mu[prime[j]*i]=0;
•             break;
•         }
•         mu[prime[j]*i]=-mu[i];
•     }
• }
```

BZOJ 2440 完全平方数

- 题目大意：求第 k 个无平方因子数
- 无平方因子数(Square-Free Number)，即分解之后所有质因数的次数都为1的数
- 首先二分答案 问题转化为求 $[1, x]$ 之间有多少个无平方因子数
- 根据容斥原理可知 对于 \sqrt{x} 以内所有的质数 有
- x 以内的无平方因子数
- $=0$ 个质数乘积的平方的倍数的数的数量(1的倍数)
- $-$ 每个质数的平方的倍数的数的数量(9的倍数, 25的倍数, ...)
- $+$ 每2个质数乘积的平方的倍数的数的数量(36的倍数, 100的倍数, ...)-...

BZOJ 2440 完全平方数

- 容易发现每个乘积 a 前面的符号恰好是 $\mu(a)$ (例如 $\mu(3) = -1$, 故9对答案的贡献为负; $\mu(6) = 1$, 故36对答案的贡献为正)
- x 以内 i^2 的倍数有 $\left\lfloor \frac{x}{i^2} \right\rfloor$ 个 故有 $Q(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \mu(i) \left\lfloor \frac{x}{i^2} \right\rfloor$
- 这题和莫比乌斯反演没关系, 算是莫比乌斯函数的一个应用吧。。。

现在我们来证明莫比乌斯反演定理

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

• 证明：

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{k|\frac{n}{d}} f(k) = \sum_{k|n} f(k) \sum_{d|\frac{n}{k}} \mu(d) = f(n)$$

• 这里利用到了 $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases}$ 这条性质

• 形式二： $F(n) = \sum_{n|d} f(d) \Rightarrow f(n) = \sum_{n|d} \mu\left(\frac{d}{n}\right) F(d)$

• 证明同理 一般要用到的都是这种形式

有了这个定理，我们能干什么？

- 对于一些函数 $f(n)$ ，如果我们很难直接求出它的值，而容易求出倍数和或约数和 $F(n)$ ，那么我们可以通过莫比乌斯反演来求得 $f(n)$ 的值
- 例： $f(n)$ 表示某一范围内 $(x,y)=n$ 的数对的数量， $F(n)$ 表示某一范围内 $n|(x,y)$ 的数对的数量
- 那么直接求 $f(n)$ 并不是很好求，而 $F(n)$ 求起来相对无脑一些，我们可以通过对 $F(n)$ 进行莫比乌斯反演来求得 $f(n)$
- 下面用几道例题来为大家讲解一下莫比乌斯反演的好处

BZOJ 2301 Problem b

- n 次询问，每次询问有多少个数对 (x,y) 满足 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 且 $\gcd(x,y)=k$
- $N \leq 5W, 1 \leq a \leq b \leq 5W, 1 \leq c \leq d \leq 5W$
- 首先利用容斥原理将一个询问拆分成四个，每次询问有多少个数对 (x,y) 满足 $1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m$ 且 $\gcd(x,y)=k$
- 这个问题等价于询问有多少个数对 (x,y) 满足 $1 \leq x \leq \lfloor n/k \rfloor, 1 \leq y \leq \lfloor m/k \rfloor$ 且 x 与 y 互质
- 利用NOI2010能量采集中的方法，我们可以得到一个 $O(n \log n)$ 的算法，但是这显然不能胜任此题的数据范围
- 这时候我们就可以考虑莫比乌斯反演了

BZOJ 2301 Problem b

- 由于之前的结论，我们可以令 $f(i)$ 为 $1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m$ 且 $\gcd(x, y) = i$ 的数对 (x, y) 的个数， $F(i)$ 为 $1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m$ 且 $i | \gcd(x, y)$ 的数对 (x, y) 的个数

- 那么显然有
$$F(i) = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor$$

- 反演后可得
$$f(i) = \sum_{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right) F(d) = \sum_{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$$

- 枚举原题中 k 的每一个倍数，我们就可以 $O(n)$ 时间处理每个询问了
- 但是 $O(n)$ 还是不能胜任本题的数据范围
- 考虑进一步优化

BZOJ 2301 Problem b

- 观察式子，发现 $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ 最多有 $2\sqrt{n}$ 个取值
- 那么 $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$ 就至多有 $2(\sqrt{n} + \sqrt{m})$ 个取值
- 枚举这 $2(\sqrt{n} + \sqrt{m})$ 个取值，对莫比乌斯函数维护一个前缀和，就可以在 $\Theta(\sqrt{n})$ 时间内出解
- 总时间复杂度 $\Theta(n\sqrt{n})$
- 枚举除法的取值这种方法在莫比乌斯反演的应用当中非常常用，且代码并不难写
- 不难写？怎么写？

BZOJ 2301 Problem b

- `if(n>m) swap(n,m);`
- `for(i=1;i<=n;i=last+1)`
- `{`
- `last=min(n/(n/i),m/(m/i));`
- `re+=(n/i)*(m/i)*(sum[last]-sum[i-1]);`
- `}`
- `return re;`
- 超级好写不是么？

BZOJ 2820 Y&Y的GCD

- 题目大意：求有多少数对 (x,y) ($1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m$) 满足 $\gcd(x,y)$ 为质数
- $n, m \leq 1000W$ 数据组数 $\leq 1W$

- 首先我们枚举每一个质数 那么答案就是

$$ans = \sum_p^{\min(n,m)} \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{pd} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{pd} \right\rfloor$$

- 直接做显然TLE 考虑优化
- 令 $pd = T$ ，那么有

$$ans = \sum_{T=1}^{\min(n,m)} \left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{T} \right\rfloor \sum_{p|T} \mu\left(\frac{T}{p}\right)$$

BZOJ 2820 YΘY的GCD

- 如果能求出 $\sum_{p|T} \mu\left(\frac{T}{p}\right)$ 的前缀和，这个问题就能在 $\Theta(\sqrt{n})$ 时间内出解。
- 只需要暴力枚举每一个质数，去更新这个质数的倍数即可。
- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \ln n + r$ 这个结论易知每个质数更新时是均摊 $\Theta(\log n)$ 的，而质数个数恰好为 $\Theta(n / \log n)$
- 故暴力枚举+维护前缀和的时间复杂度即为 $\Theta(n)$ 。

BZOJ 3529 数表

- 题目大意：令 $F(i)$ 为 i 的约数和， q 次给定 n, m, a , 求

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \\ F(\gcd(i, j)) \leq a}} F(\gcd(i, j)) \bmod 2^{31}$$

- $n, m \leq 10^5, q \leq 2W, a \leq 10^9$
- a 的限制十分讨厌 我们首先假设没有这个限制
- 令 $g(i)$ 为 $1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m, \gcd(x, y) = i$ 的数对 (x, y) 的个数
- 那么显然有

$$g(i) = \sum_{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$$

BZOJ 3529 数表

- $F(i)$ 利用线性筛可以在 $O(n)$ 时间内处理出来 那么就有

$$ans = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} F(i)g(i) = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} F(i) \sum_{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor \sum_{i|d} F(i) \mu\left(\frac{d}{i}\right)$$

- 治好了我多年的公式恐惧症~~

- 现在我们只要有 $\sum_{i|d} F(i) \mu\left(\frac{d}{i}\right)$ 的前缀和就可以在 $\Theta(\sqrt{n})$ 时间内解决这个问题
- 与上一题相同，枚举每一个 i ，暴力更新 i 的倍数，然后处理前缀和，这样做是 $O(n \log n)$ 的
- 那么现在有了 a 的限制怎么搞呢？

BZOJ 3529 数表

- 我们发现对答案有贡献的 i 只有 $F(i) \leq a$ 的 i
- 我们离线处理，将询问按照 a 排序， i 按照 $F(i)$ 排序
- 每次询问将所有 $F(i) \leq a$ 的 i 按照之前的方式插入 用树状数组维护前缀和即可
- 时间复杂度 $\Theta(n \log^2 n + q \sqrt{n} \log n)$
- 取模可以利用自然溢出int 最后再对 $2^{31}-1$ 取与即可

BZOJ 2154 Crash的数字表格

- 题目大意：给定 n, m , 求 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m lcm(i, j)$ ($n, m \leq 10^7$)

$$ans = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m lcm(i, j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{i \cdot j}{gcd(i, j)}$$

- 枚举 $d = gcd(i, j)$
- 令 $F(x, y) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq x \\ 1 \leq j \leq y \\ gcd(i, j) = 1}} i \cdot j$

- 则有

$$ans = \sum_{d=1}^{\min(n, m)} \frac{d^2 \cdot F\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor\right)}{d} = \sum_{d=1}^{\min(n, m)} d \cdot F\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor\right)$$

BZOJ 2154 Crash的数字表格

- 继续令 $Sum(x, y) = \sum_{i=1}^x \sum_{j=1}^y i \cdot j = \frac{x(x+1)}{2} \cdot \frac{y(y+1)}{2}$

- 那么根据莫比乌斯反演可以推出

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{\min(x, y)} i^2 \cdot \mu(i) \cdot Sum\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{y}{i} \right\rfloor\right)$$

- 不是很好推，和之前的思路一样，我不当堂推了
- 将两个式子分别进行 $\Theta(\sqrt{n})$ 的计算 可以得到一个 $\Theta(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}) = \Theta(n)$ 的算法
- 至此本题已经可以解决。

BZOJ 2693 jzptab

- 题目大意：同上题 多组数据
- 由于是多组数据 因此上一题的 $\Theta(n)$ 算法显然超时
- 考虑进一步优化

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{d=1}^{\min(n,m)} d \sum_{i=1}^{\min(n,m)} i^2 \cdot \mu(i) \cdot Sum\left(\left\lfloor \frac{n}{di} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{di} \right\rfloor\right) \\ &= \sum_{D=1}^{\min(n,m)} Sum\left(\left\lfloor \frac{n}{D} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{D} \right\rfloor\right) \sum_{i|D} \frac{D}{i} \cdot i^2 \cdot \mu(i) \end{aligned}$$

- 观察后面的 $\sum_{i|D} \frac{D}{i} \cdot i^2 \cdot \mu(i)$ ，如果我们能对这个函数求出一个前缀和，那么就可以在 $\Theta(\sqrt{n})$ 的时间内处理每个询问

BZOJ 2693 jzptab

- 注意到积性函数的约数和也是积性函数
- 因此后面的那坨东西可以利用线性筛求出来
- 线性筛当 $i \bmod prime_j \equiv 0$ 时不满足积性函数的条件，但是由于此时 $\mu(prime_j \cdot i) = 0$ ，故多出来的因数的函数值都是0，增加的只有原先因数的 $\frac{D}{i}$ 部分乘了个 $prime[j]$ 而已
- 这两道题的公式都有些鬼畜，建议写这两道题之前先推推有关公式，权当治疗公式恐惧症了

谢谢大家